

Два подхода к исследованию эффекта поверхностных напряжений в упругом теле с почти круговым нанодфектом

© 2020

Вакаева Александра Борисовна^{*1}, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Шувалов Глеб Михайлович², ассистент

Костырко Сергей Алексеевич³, кандидат физико-математических наук, доцент

Седова Ольга Сергеевна⁴, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург (Россия)

*E-mail: a.vakaeva@spbu.ru

¹ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0925-1143>

²ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9039-4888>

³ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3074-0969>

⁴ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9097-8501>

Аннотация: Большинство современных конструкционных и функциональных материалов упруго неоднородны, причем для многих из них типичны вытянутые полости или включения, близкие по форме к цилиндрическим. От особенностей напряженно-деформированного состояния приповерхностных и приграничных слоев материала в неоднородных системах во многом зависят их прочностные и физико-химические свойства. Развитие процессов пластической деформации и разрушения в этих областях в большой степени определяет механическое поведение материала в целом и вызывает огромный интерес. Изучается влияние межфазных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого биматериала с гладкой волнообразной границей раздела. Рассматривается двумерная задача механики деформируемого тела об упругом теле с нанометровым рельефом поверхности раздела, возникающим между почти круговым включением и матрицей. Предполагается, что тело находится в однородном поле напряжений. Для решения задачи используется упрощенная модель поверхностной теории упругости Гертца – Мердока, в которой межфазная граница представляет собой пренебрежительно тонкий слой, идеально прилегающий к объемным фазам. Считается, что на межфазной границе отсутствуют разрывы перемещений, а скачок напряжений определяется действием поверхностного/межфазного напряжения согласно обобщенному закону Лапласа – Юнга. При помощи метода возмущений границы решение задачи для каждого приближения сводится к одностепенному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению относительно неизвестного поверхностного/межфазного напряжения. Численные результаты приводятся для задачи в первом приближении. В результате проводится сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния методом конечных элементов и аналитическим методом возмущений границы.

Ключевые слова: почти круговой нанодфект; метод возмущений границы (МВГ); метод конечных элементов (МКЭ); концентрация напряжений; поверхностное напряжение.

Благодарности: А.Б. Вакаева и С.А. Костырко благодарят Российский фонд фундаментальных исследований (грант РФФИ № 18-01-00468) за поддержку в разработке теоретической модели задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с почти круговым наноразмерным дефектом и ее аналитического решения.

О.С. Седова благодарит Российский научный фонд (грант РНФ № 18-71-00071) за поддержку в обеспечении численного конечно-элементного моделирования соответствующей задачи.

Статья подготовлена по материалам докладов участников IX Международной школы «Физическое материаловедение» (ШФМ-2019) с элементами научной школы для молодежи, Тольятти, 9–13 сентября 2019 года.

Для цитирования: Вакаева А.Б., Шувалов Г.М., Костырко С.А., Седова О.С. Два подхода к исследованию эффекта поверхностных напряжений в упругом теле с почти круговым нанодфектом // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2020. № 1. С. 7–14. DOI: 10.18323/2073-5073-2020-1-7-14.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство современных конструкционных и функциональных материалов упруго неоднородны, причем для многих из них типичны вытянутые полости или включения, близкие по форме к цилиндрическим. От особенностей напряженно-деформированного состояния приповерхностных и приграничных слоев материала в таких неоднородных системах во многом зависят их прочностные и физико-химические свойства [1; 2]. На макроуровне влияние энергии атомов, находящихся на поверхности/границе раздела, на напряженное со-

стояние твердого тела незначительно, так как оно значительно меньше по сравнению с влиянием других нагрузок [3; 4]. Следует отметить, что при переходе от макро- к наномасштабному уровню отношение числа атомов на поверхности тела к числу атомов в объеме увеличивается. Таким образом, отношение объема, занимаемого атомами на соответствующей поверхности/интерфейсе и вблизи нее, к объему основного материала становится значительным. Поля напряжений в окрестности наноразмерных структур могут существенно зависеть от свободной энергии поверхности и поверхностных напряжений [5]. Как результат, поверхностные/межфазные

напряжения напрямую связаны с размерным эффектом, т. е. зависимостью свойств материала от его размера.

Для объяснения данного эффекта М.Э. Гертин и А.И. Мердок разработали поверхностную теорию упругости [6], основанную на связи изменения свободной энергии поверхности с изменением поверхностной деформации. Такой подход показал свою эффективность при решении широкого круга задач, включающих задачи о включениях, неоднородностях, дислокациях и дисклинациях у свободных и межфазных границ [7–9]. Так, континуальная модель поверхностного/межфазного напряжения предполагает, что твердое тело состоит из объемной и поверхностной фаз, которые связаны условием идеального сцепления и имеют различные упругие свойства. Упомянутая теория была подтверждена методами молекулярной динамики [10]. В многочисленных работах для изучения эффекта поверхностных/межфазных напряжений в наноструктурных материалах использовалось конечно-элементное моделирование [11; 12]. Таким образом, рассмотрение подобного рода моделей помогает исследовать уникальные свойства наноразмерных материалов.

В работе [13] методом возмущений границы (МВГ) была решена задача об упругом теле с почти круговым дефектом на макроуровне. Влияние поверхностных и межфазных напряжений на упругие материалы, содержащие наноразмерные неоднородности, было исследовано в работах [14–16]. Особенности поведения поверхностного слоя в напряженном материале заключаются, в частности, в том, что изначально гладкая поверхность становится шероховатой под действием ряда природных явлений: тепла, света, коротковолнового электромагнитного излучения, радиоактивных выбросов, химических веществ, механических напряжений и др. [17–19].

Цель работы – численное решение задачи об упругом теле с почти круговым нанодфектом методом конечных элементов и сравнение полученных результатов с аналитическим решением.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругую плоскость с включением нанометрового размера, форма которого мало отличается от круга (рис. 1). Пусть матрице соответствует область Ω_1 , включению – Ω_2 . Упругие свойства каждой области Ω_k , $k=1, 2$ определяются коэффициентом Пуассона ν_k и модулем сдвига μ_k . Межфазная граница Γ представляется в виде

$$z \equiv \zeta = e^{i\theta} \rho = a(1 + \varepsilon \cos 2\theta)e^{i\theta},$$

где $z = x_1 + ix_2$ – комплексная переменная (i – мнимая единица); максимальное отклонение границы включения от окружности радиуса a определяется при помощи малого параметра ε , $\varepsilon \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$.

Предполагаем, что на межфазной границе контакта двух сред Γ отсутствуют разрывы перемещений, а скачок напряжений σ^k ($k=1, 2$) будем определять через межфазное напряжение τ , используя обобщенный закон Лапласа – Юнга [20; 21]. Условия контакта имеют вид:

$$\Delta \sigma_n(\zeta) = \sigma_n^+ - \sigma_n^- = \frac{\tau}{R} - i \frac{1}{h} \frac{d\tau}{d\theta} \equiv t^s(\zeta), \quad (1)$$

$$\Delta u(\zeta) = u^+ - u^- = 0. \quad (2)$$

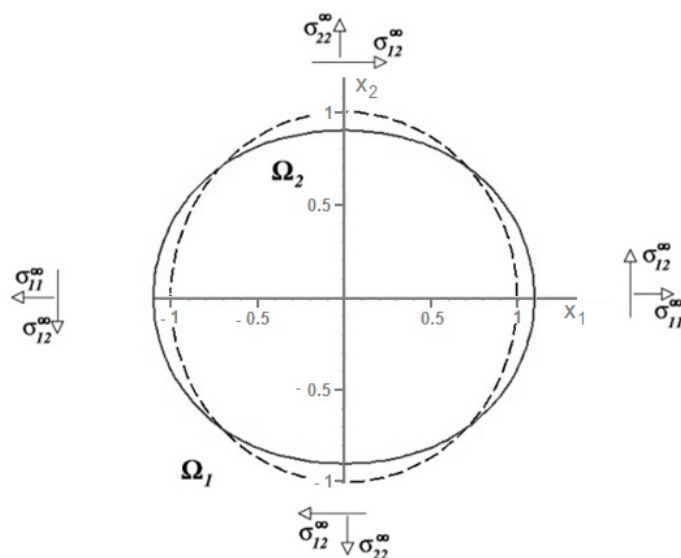


Рис. 1. Межфазная граница нановключения, определенная по косинусoidalному закону (сплошная линия) при $a=1$ нм и $\varepsilon=0,1$

Fig. 1. Nanoinclusion interfacial boundary determined according to the cosinusoidal law (solid line) at $a=1$ nm and $\varepsilon=0.1$

Считаем, что на границе Γ действуют нормальные σ_{nn} и касательные σ_{nt} усилия в локальной декартовой прямоугольной системе координат n, t (в уравнениях (1), (2) ось n перпендикулярна Γ). Эти усилия определяются действием межфазного напряжения τ , характерного для наномасштабных структур, отнесенного к радиусу a . $u = u_1 + iu_2$; u_1, u_2 – компоненты вектора перемещений; h – метрический коэффициент [22]; R – радиус кривизны. В формулах (1), (2) введены обозначения: $\sigma_n^{\pm} = \lim_{z \rightarrow \zeta \in \Gamma} \sigma_n(z)$, $u^{\pm} = \lim_{z \rightarrow \zeta \in \Gamma} u(z)$. Знак « \leftarrow » берется при $z \in \Omega_1$, а « \rightarrow » – при $z \in \Omega_2$.

На бесконечности заданы напряжения σ_{ij}^{∞} и угол поворота ω^{∞} . Для случая плоской деформации определяющие соотношения поверхностной и объемной теории упругости, согласно [4; 5], можно записать в виде

$$\tau = (\lambda_s + 2\mu_s)\epsilon_{nt}^s, \quad \sigma_{nt} = 2\mu\epsilon_{nt}, \quad (3)$$

$$\sigma_{nn} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{nn} + \lambda\epsilon_{tt}, \quad \sigma_{tt} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{tt} + \lambda\epsilon_{nn}. \quad (4)$$

В равенствах (3), (4) ϵ_{ij}^s и ϵ_{ij} – компоненты поверхностного и объемного тензора деформаций; λ_s и μ_s – модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе λ и μ для объемной изотропной упругости.

Для поиска неизвестного межфазного напряжения и решения соответствующей краевой задачи мы используем равенства (1)–(4) и условие непрерывности перемещений при переходе от Ω_1 и Ω_2 к границе Γ [20; 21] в терминах окружных деформаций:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \epsilon_{tt}^k = \epsilon_{tt}^s, \quad k = 1, 2.$$

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Согласно [23], для каждой области Ω_k связь напряжений и перемещений с комплексными потенциалами $\Phi_k(z)$, $Y_k(z)$ может быть записана в виде единой формулы:

$$\sigma_n^k(z) = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + \left[\frac{1}{z^2} \left(\overline{\Phi_k(z)} + Y_k\left(\frac{1}{z}\right) \right) + \left(z - \frac{1}{z} \right) \overline{\Phi_k'(z)} \right] \frac{dz}{dz},$$

где $z \in \Omega_k$;
 $dz = |dz| e^{i\theta}$;

α – угол между осями t и x_1 . Функции $\Phi_k(z)$, $k=1, 2$ голоморфны в соответствующих областях Ω_k , $Y_k(z)$ – в областях $\tilde{\Omega}_k(z) = \left\{ z : z^{-1} \in \Omega_k \right\}$.

В соответствии с МВГ [13; 20; 21] комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$, $Y_k(z)$ и межфазное напряжение τ представляются в виде сходящихся степенных рядов по z , $k=1, 2$. Таким образом, для каждого приближения получаем две независимые краевые задачи Римана – Гильберта [20; 21]. При использовании комплексных потенциалов Гурса – Колосова, соотношений Колосова – Мусхелишвили [24], МВГ, а также упрощенной теории поверхностной упругости Гертена – Мердока решение задачи сводится к последовательности сингулярных интег-

ро-дифференциальных уравнений относительно функций τ_n , $n=0, 1, \dots$ [20; 21]:

$$\tau_n(s) + \frac{M(\kappa+1)}{2a - M(\kappa-1)} \times \times \Re \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\tau_n(\eta) + \eta \tau_n'(\eta)}{\eta - s} d\eta \right) = G_n(s), \quad (5)$$

где $s = e^{i\theta}$;

$$M = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{2\mu};$$

$$k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

Функции G_n зависят от всех предыдущих приближений. Следуя алгоритму решения интегрального уравнения, межфазное напряжение ищем в виде степенного ряда с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты межфазного напряжения в первом приближении будут зависеть от результатов нулевого приближения.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для численного решения плоской задачи используем пакет конечно-элементного анализа ANSYS. В силу двойной симметрии рассматривается четверть конструкции (рис. 2). Согласно [11], объемные и межфазные слои рассматриваются как различные фазы, отличающиеся упругими свойствами. Для построения конечно-элементной модели используем двумерные шестиугольные треугольные элементы plane183; вблизи межфазной границы сетка сгущается, что позволяет с высокой точностью аппроксимировать границу раздела двух сред. Межфазный слой моделируется стержневыми двухузловыми элементами link180.

В качестве упругих параметров матрицы задаются модуль Юнга $E_1=70,3$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_1=0,34$, соответствующие постоянным Ламе $\lambda_1=58,17$ ГПа, $\mu_1=26,13$ ГПа. Для определения стержневых элементов задаются модуль Юнга E_s и площадь поперечного сечения A . При этом необходимо выполнение условия $\tilde{E}_s = E_s A$, где $\tilde{E}_s = \lambda_s + 2\mu_s$ [11]. Упругие свойства межфазной границы определяются при помощи постоянной $M=M_1=0,117$ нм при $\lambda_s=6,851$ Н/м, $\mu_s=-0,376$ Н/м [10; 25]. В ходе исследования мы предполагаем, что упругие свойства матрицы и включения связаны следующим образом: $m=\mu_2/\mu_1=1/3$, где m – коэффициент жесткости; коэффициент Пуассона $\nu_1=\nu_2$.

В ходе исследования сопоставляем численные результаты, полученные на основе первого приближения МВГ, с результатами, полученными методом конечных элементов (МКЭ) в программе ANSYS. Рассматривается упругая плоскость с почти круговым нановключением, граница которого определяется по косинусоидальному закону (рис. 1). На основе модели поверхностной теории упругости Гертена – Мердока и МВГ [20; 21] для каждого приближения решение задачи сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению (5). В первом приближении МВГ для включения,

заданного по косинусоидальному закону при $a=2$ нм; $\varepsilon=0,1$, коэффициент концентрации напряжения (ККН) $S_a^1 = \max \sigma_{\theta\theta}^1 / \sigma_{22}^\infty = 1,77$ и $S_a^2 = \max \sigma_{\theta\theta}^2 / \sigma_{22}^\infty = 0,72$, где $\sigma_{\theta\theta}^k$ – окружное напряжение для матрицы ($k=1$) и для включения ($k=2$).

На рис. 3 показано распределение ККН S_a^k , $k=1, 2$ ($\theta=0$) на границе почти кругового включения для матрицы при $k=1$ (кривые под номером 1) и для включения $k=2$ (кривые под номером 2) в зависимости от радиуса a при одноосном растяжении σ_{22}^∞ вдоль оси x_2 при $\varepsilon=0,1$ и $m=1/3$. Пунктирными линиями изображено решение МВГ при $M=M_1$. Для решения МКЭ введено обозначение

ние S_n^k , $k=1, 2$, на рис. 3 соответствующие кривые, построенные крестиками (символ «х»), при $M=M_1$. Пунктирные кривые отвечают классическому решению. Поле напряжений вблизи нановключения под действием одноосного растяжения представлено на рис. 4.

Таким образом, с помощью МКЭ и МВГ исследовано влияние межфазных напряжений на напряженно-деформированное состояние биматериала с нанодфектом, близким к круговому. Относительная разность между решениями, полученными на основе упомянутых подходов, не превышает 16 %, что позволяет сделать вывод о хорошей согласованности методов.

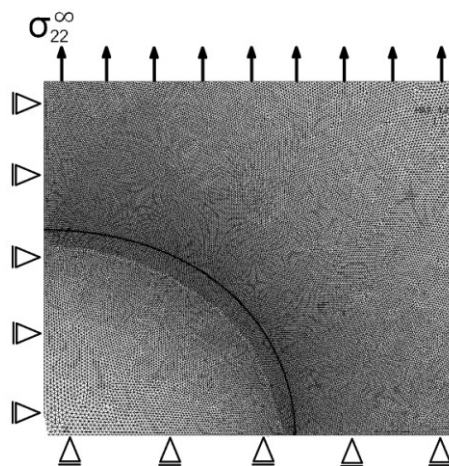


Рис. 2. Фрагмент конечно-элементной модели упругого тела с почти круговым нановключением ($a=2$ нм; $\varepsilon=0,1$)

Fig. 2. A fragment of a finite-element model of an elastic body with a nearly circular nanoinclusion ($a=2$ nm; $\varepsilon=0.1$)

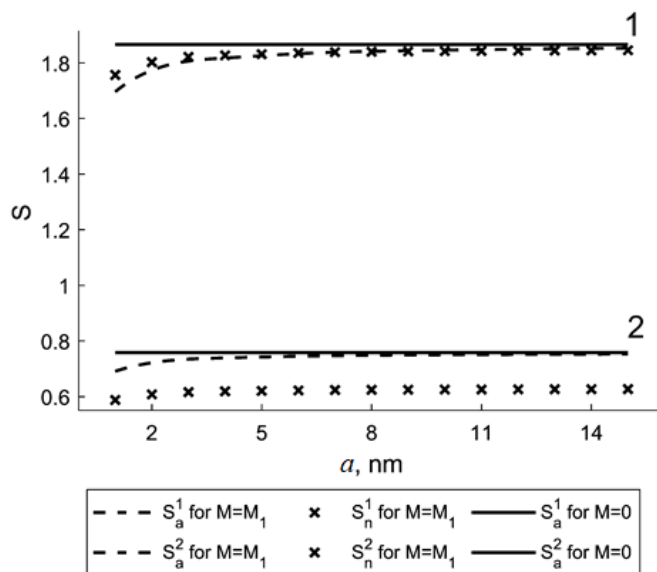


Рис. 3. Зависимость коэффициента концентрации напряжения S от радиуса базового включения a

Fig. 3. The dependence of the stress concentration factor S on the basic inclusion radius a

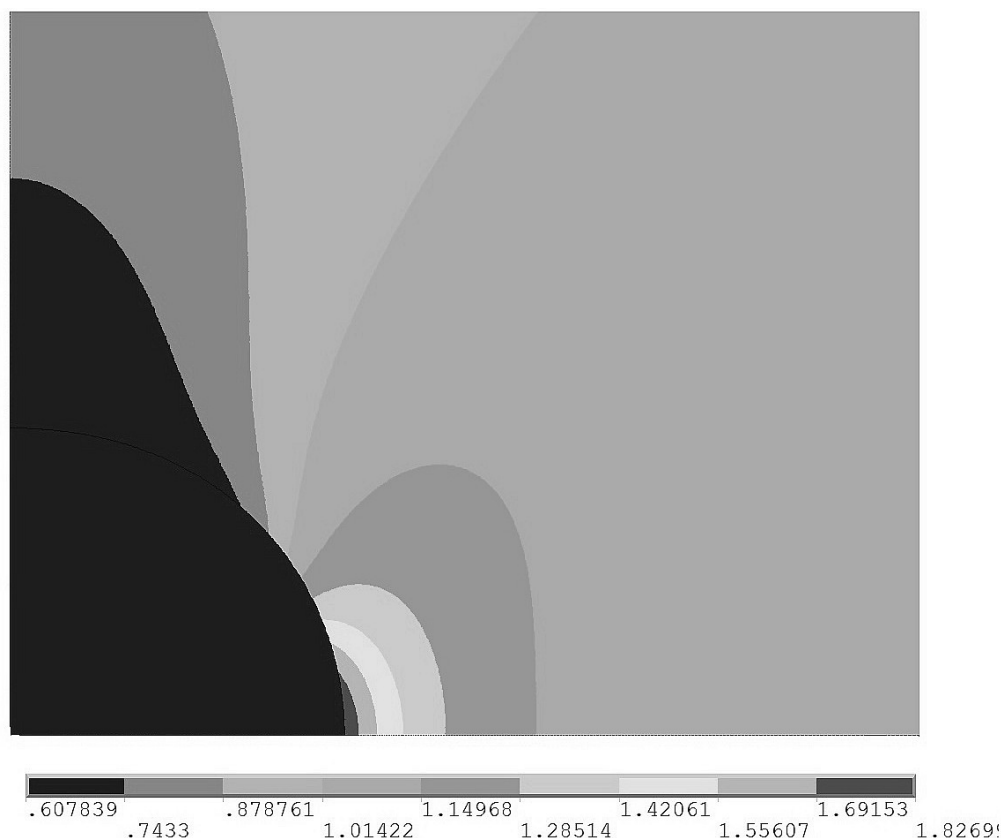


Рис. 4. Напряженное состояние упругой плоскости вблизи нановключения при $a=2$ нм и $\varepsilon=0,1$

Fig. 4. Stress state of an elastic surface near the nanoinclusion at $a=2$ nm and $\varepsilon=0.1$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Проанализирована математическая модель упругого материала с наноразмерным включением.

Решение рассматриваемой задачи методом возмущений границы (МВГ) получено в каждом приближении. В первом приближении исследовано влияние межфазных напряжений на напряженно-деформированное состояние твердого тела на межфазной границе. Так, с уменьшением радиуса базового включения a коэффициент концентрации напряжения (ККН) неограниченно убывает при $M=M_j$. При увеличении радиуса a максимальные окружные напряжения начинают стремиться к классическому решению без учета межфазного напряжения ($M=0$). Таким образом, продемонстрирован размерный эффект в виде зависимости напряженного состояния от размера дефекта.

В пакете ANSYS построена модель упругой плоскости с включением нанометрового размера, форма которого мало отличается от круговой. Аналитические результаты для гладкой волнистой поверхности при $\varepsilon=0,1$ хорошо согласуются с результатами, полученными по методу конечных элементов (МКЭ). Увеличивая размерные параметры межфазной границы, мы приходим к решениям, где упругие свойства межфазной границы не учитываются. Однако при увеличении малого параметра относительная разница между решениями МКЭ и первым приближением МВГ возрастает. Таким обра-

зом, можно сделать вывод о важности учета нелинейных членов решения МВГ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. Theory of elasticity at the nanoscale // *Advances in Applied Mechanics*. 2009. Vol. 42. P. 1–68.
2. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // *Acta Mechanica Sinica*. 2011. Vol. 24. № 1. P. 52–82.
3. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наукова думка, 1985. 200 с.
4. Povstenko Ya.Z. Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids // *Journal of Mechanics and Physics Solids*. 1993. Vol. 41. № 9. P. 1499–1514.
5. Gibbs J.W. The Scientific Papers of J. Willard Gibbs. Vol. 1. London: Longmans-Green, 1906. 476 p.
6. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids // *International Journal of Solid Structures*. 1978. Vol. 14. № 6. P. 431–440.
7. Bochkarev A.O., Grekov M.A. Influence of Surface Stresses on the Nanoplate Stiffness and Stability in the Kirsch Problem // *Physical Mesomechanics*. 2019. Vol. 22. № 3. P. 209–223.

8. Grekov M.A., Sergeeva T.S. Interaction of edge dislocation array with biomaterial interface incorporating interface elasticity // *International Journal of Engineering Science*. 2020. Vol. 149. P. 103233.
9. Smirnov A.M., Krasnitskii S.A., Gutkin M.Y. Generation of misfit dislocation in a core-shell nanowire near the edge of prismatic core // *Acta Materialia*. 2020. Vol. 186. P. 494–510.
10. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*. 2000. Vol. 11. № 3. P. 139–147.
11. Wang W., Zeng Xi., Ding J. Finite element modeling of two-dimensional nanoscale structures with surface effects // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2010. Vol. 48. № 12. P. 426–431.
12. Tian L., Rajapakse R.K.N.D. Finite element modeling of nanoscale inhomogeneities in an elastic matrix // *Computational Materials Science*. 2007. Vol. 41. № 5. P. 568–574.
13. Вакаева А.Б., Греков М.А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого тела с почти круговыми дефектами // *Процессы управления и устойчивость*. 2014. Т. 1. № 1. С. 111–116.
14. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects // *Acta Mechanica*. 2016. Vol. 227. № 1. P. 29–42.
15. Eremeyev V.A., Lebedev L.P. Mathematical study of boundary-value problems within the framework of Steigmann-Ogden model of surface elasticity // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2016. Vol. 28. P. 407–422.
16. Grekov M.A. Fundamental Solution for the Generalized Plane Stress of a Nanoplate // *Advanced Structured Materials*. 2019. Vol. 108. P. 157–164.
17. Седова О.С., Пронина Ю.Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2016. № 2. С. 33–44.
18. Medina H., Hinderliter B. The stress concentration factor for slightly roughened random surfaces: Analytical solution // *International Journal of Solid and Structures*. 2014. Vol. 51. P. 2012–2018.
19. Gharahi A., Schiavone P. Effective elastic properties of plane micro polar nanocomposites with flexural effects // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 149. P. 84–92.
20. Вакаева А.Б. Напряженно-деформированное состояние упругого тела с почти круговым включением при учете межфазного напряжения // *Вектор науки Тольяттинского государственного университета*. 2017. № 4. С. 20–25.
21. Vakaeva A.B., Grekov M.A. Effect of interfacial stresses in an elastic body with a nanoinclusion // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. P. 070036.
22. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 374 с.
23. Grekov M.A. The perturbation approach for a two-component composite with a slightly curved interface // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika Mekhanika Astronomiya*. 2004. № 1. P. 81–88.
24. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
25. Sharma P., Ganti S., Bhate N. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities // *Applied Physics Letters*. 2003. Vol. 82. № 4. P. 535–537.

REFERENCES

1. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. Theory of elasticity at the nanoscale. *Advances in Applied Mechanics*, 2009, vol. 42, pp. 1–68.
2. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, vol. 24, no. 1, pp. 52–82.
3. Podstrigach Ya.S., Povstenko Yu.Z. *Vvedenie v mekhaniku poverkhnostnykh yavleniy v deformiruemyykh tverdykh telakh* [Introduction to the mechanics of surface phenomena in deformable solids]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 200 p.
4. Povstenko Ya.Z. Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids. *Journal of Mechanics and Physics Solids*, 1993, vol. 41, no. 9, pp. 1499–1514.
5. Gibbs J.W. *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs*. London, Longmans-Green, 1906. Vol. 1, 476 p.
6. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids. *International Journal of Solid Structures*, 1978, vol. 14, no. 6, pp. 431–440.
7. Bochkarev A.O., Grekov M.A. Influence of Surface Stresses on the Nanoplate Stiffness and Stability in the Kirsch Problem. *Physical Mesomechanics*, 2019, vol. 22, no. 3, pp. 209–223.
8. Grekov M.A., Sergeeva T.S. Interaction of edge dislocation array with biomaterial interface incorporating interface elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 2020, vol. 149, pp. 103233.
9. Smirnov A.M., Krasnitskii S.A., Gutkin M.Y. Generation of misfit dislocation in a core-shell nanowire near the edge of prismatic core. *Acta Materialia*, 2020, vol. 186, pp. 494–510.
10. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 2000, vol. 11, no. 3, pp. 139–147.
11. Wang W., Zeng Xi., Ding J. Finite element modeling of two-dimensional nanoscale structures with surface effects. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2010, vol. 48, no. 12, pp. 426–431.
12. Tian L., Rajapakse R.K.N.D. Finite element modeling of nanoscale inhomogeneities in an elastic matrix. *Computational Materials Science*, 2007, vol. 41, no. 5, pp. 568–574.
13. Vakaeva A.B., Grekov M.A. Investigation of the stress-strain state of an elastic body with almost circular defects. *Protsessy upravleniya i ustoychivost*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 111–116.
14. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mechanica*, 2016, vol. 227, no. 1, pp. 29–42.
15. Eremeyev V.A., Lebedev L.P. Mathematical study of boundary-value problems within the framework of

- Steigmann-Ogden model of surface elasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2016, vol. 28, pp. 407–422.
16. Grekov M.A. Fundamental Solution for the Generalized Plane Stress of a Nanoplate. *Advanced Structured Materials*, 2019, vol. 108, pp. 157–164.
 17. Sedova O.S., Pronina Yu.G. On the choice of equivalent stress for the problem of mechanochemical corrosion of spherical members. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya*, 2016, no. 2, pp. 33–44.
 18. Medina H., Hinderliter B. The stress concentration factor for slightly roughened random surfaces: Analytical solution. *International Journal of Solid and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2012–2018.
 19. Gharahi A., Schiavone P. Effective elastic properties of plane micro polar nanocomposites with flexural effects. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, vol. 149, pp. 84–92.
 20. Vakaeva A.B. Stress-strain state of an elastic body with a nearly circular inclusion incorporating interfacial stress. *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2017, no. 4, pp. 20–25.
 21. Vakaeva A.B., Grekov M.A. Effect of interfacial stresses in an elastic body with a nanoinclusion. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, p. 070036.
 22. Novozhilov V.V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1958. 374 p.
 23. Grekov M.A. The perturbation approach for a two-component composite with a slightly curved interface. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika Mekhanika Astronomiya*, 2004, no. 1, pp. 81–88.
 24. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 707 p.
 25. Sharma P., Ganti S., Bhate N. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities. *Applied Physics Letters*, 2003, vol. 82, no. 4, pp. 535–537.

Two approaches to study the effect of surface stresses in an elastic body with a nearly circular nanodefect

© 2020

Aleksandra B. Vakaeva^{*1}, PhD (Physics and Mathematics), senior lecturer

Gleb M. Shuvalov², assistant

Sergey A. Kostyrko³, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor

Olga S. Sedova⁴, PhD (Physics and Mathematics), senior lecturer

St. Petersburg State University, St. Petersburg (Russia)

*E-mail: a.vakaeva@spbu.ru

¹ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0925-1143>

²ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9039-4888>

³ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3074-0969>

⁴ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9097-8501>

Abstract: Most of the advanced construction and functional materials are elastically nonuniform, moreover, for many of them, the elongated holes and inclusions are typical, which are similar to a cylinder in form. The strength and physico-chemical properties of a material, to a great extent, depend on the peculiarities of the strain-stress state of the near-surface and boundary layers of the materials in the heterogeneous systems. The development of the processes of elastic deformation and fracture in these areas, to a large extent, determines the mechanical behavior of a material in general and arouses much interest. The authors study the influence of interfacial stresses on the strain-stress state of elastic bimaterial with smooth waveform interface; consider the 2-D solid mechanics problem of an elastic body with nanoscale boundary surface texture, which appears between the nearly circular inclusion and the matrix. It is expected that a body is situated within a uniform stress field. To solve the problem, the authors used the simplified Gurtin–Murdoch’s surface/interface elasticity model, where the interfacial boundary is the negligibly thin layer exactly bordered on the bulk phases. It is acknowledged that there are no displacement discontinuities on the interfacial boundary, and the stress jump is determined by the effect of surface/interface stress according to the generalized Laplace–Young law. Using the boundary perturbation method, the problem solution for each-order approximation is limited to a singular integrodifferential equation against the unknown surface/interface stress. The paper gives the numerical results for the problem to a first-order approximation. As a result, the authors carry out the comparative analysis of the strain-stress state using the finite-element method and analytical boundary perturbation method.

Keywords: nearly circular nanodefect; boundary perturbation method (BPM); finite-element method (FEM); stress concentration; surface stress.

Acknowledgements: A.B. Vakaeva and S.A. Kostyrko express their gratitude to the Russian Foundation for Basic Research (grant of RFBR № 18-01-00468) for its support in developing a theoretical model of the problem of the stress-strain state of an elastic body with an almost circular nanoscale defect and its analytical solution.

O.S. Sedova thanks the Russian Science Foundation (grant of RSF № 18-71-00071) for its support in providing numerical finite element modeling of the corresponding problem.

The paper was written on the reports of the participants of the IX International School of Physical Materials Science (SPM-2019) with elements of a scientific school for young adults, Togliatti, September 9–13, 2019.

For citation: Vakaeva A.B., Shuvalov G.M., Kostyrko S.A., Sedova O.S. Two approaches to study the effect of surface stresses in an elastic body with a nearly circular nanodefekt. *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2020, no. 1, pp. 7–14. DOI: 10.18323/2073-5073-2020-1-7-14.